ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

# DISEQUAZIONI

**Monica Bagagli**

PRECORSO DI MATEMATICA GENERALE CLET E CLEI

Si dice **disequazione** ogni disuguaglianza che contiene almeno una lettera, detta **incognita**, di cui si cercano i valori per i quali la disuguaglianza è *vera*.

$$A(X)<B(X) \qquad \textit{oppure} \quad A(X)>B(X)$$

$$A(X)\leq B(X) \qquad \textit{oppure} \quad A(X)\geq B(X)$$

Si chiama **insieme delle soluzioni** l'insieme dei valori di x che, sostituiti all'incognita, rendono la disequazione una disuguaglianza vera

Una disequazione può essere;

- **Impossibile:** non ha soluzioni.

  Esempio: $x^2 + 1 < 0$

  Mai verificata

- **Sempre verificata:** è verificata per ogni valore reale di x.

  Esempio: $x^2 + 1 > 0$

  Sempre verificata

- **Possibile:** ammette soluzioni.

  L'insieme delle soluzioni è, in generale, un intervallo o un'unione di intervalli.

  Esempio: $x - 6 > 0$

  $x > 6$

# INTERVALLI $(a,b \in R, a < b)$

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

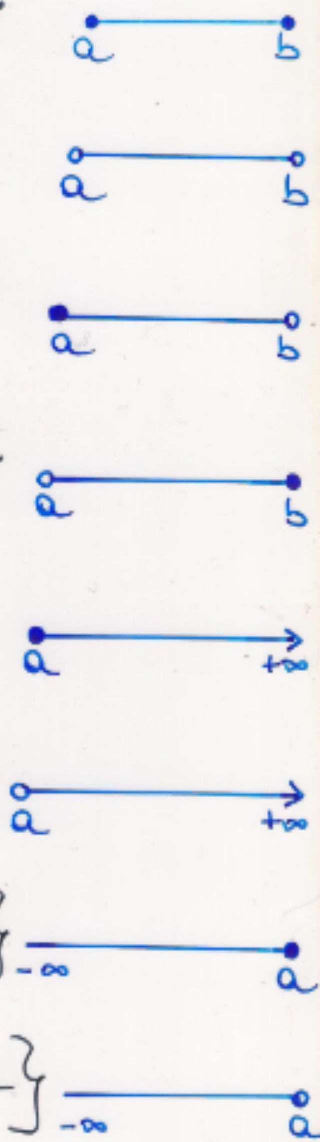
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$

$$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$$

$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$$



# PRINCIPI DI EQUIVALENZA PER LE DISEQUAZIONI

## Primo principio di equivalenza

**Aggiungendo o sottraendo** ai due membri di una disequazione uno stesso numero o una stessa espressione (definita per tutti i valori reali delle variabili che vi compaiono) si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

## Secondo principio di equivalenza

**Moltiplicando o dividendo** entrambi i membri di una disequazione per un numero *diverso da 0,* si ottiene una disequazione equivalente a quella data, a condizione di:

- **mantenere lo stesso verso** se il numero per cui si moltiplica o divide è **positivo**
- **invertire il verso della** disequazione se il numero per cui si moltiplica o divide è **negativo**

# La forma normale e il grado di una disequazione

Una disequazione algebrica nell'incognita x si dice ridotta in **forma normale** se risulta scritta in una delle seguenti forme:

$P(X)>0$ oppure $P(X)<0$ oppure $P(X) \geq 0$ oppure $P(X) \leq 0$

Dove P(X) è un polinomio ridotto.

In tal caso il grado del polinomio P(X) di dice **grado della disequazione.**

# Disequazioni numeriche intere di primo grado

$$3x - 1 > 5x + 4$$

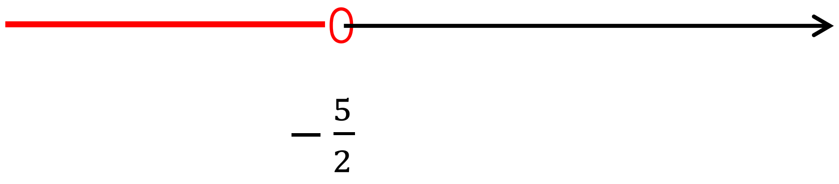
$$3x - 5x > 4 + 1$$

$$-2x > 5$$

$$2x < -5$$

$$x < -\frac{5}{2}$$

S=$\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$




S=$\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$

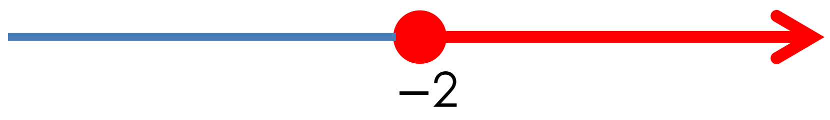
$$(x-2)-3(x+1)-3x \leq 5$$

$$x-2-3x-3-3x \leq 5$$

$$-5x \leq 10$$

$$5x \geq -10$$

$$x \geq -2$$




S=[-2 , +∞)

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} > \frac{5}{3}$$

$$\frac{9x-6}{12} > \frac{20}{12}$$

9x-6>20

$$9x > 26$$

$$x > \frac{26}{9}$$

$S=\left(\frac{26}{9},+\infty\right)$

$S=\left]\frac{26}{9},+\infty\right[$

$$(3x+1)(2x-3) \leq 6x(x-1) - x$$

$$6x^2 - 9x + 2x - 3 \leq 6x^2 - 6x - x$$

$$-9x + 2x + 6x + x \leq 3$$

$$0x \leq 3$$

Sempre verificata

S=R

$$(3x+1)^2-4x(x-2)\leq 5x(x+6)-16x$$

$$9x^2+1+6x-4x^2+8x\leq 5x^2+30x-16x$$

$$6x+8x+16x-30x\leq -1$$

$$0x\leq -1$$

Mai verificata

S=∅

# DISEQUAZIONI FRATTE

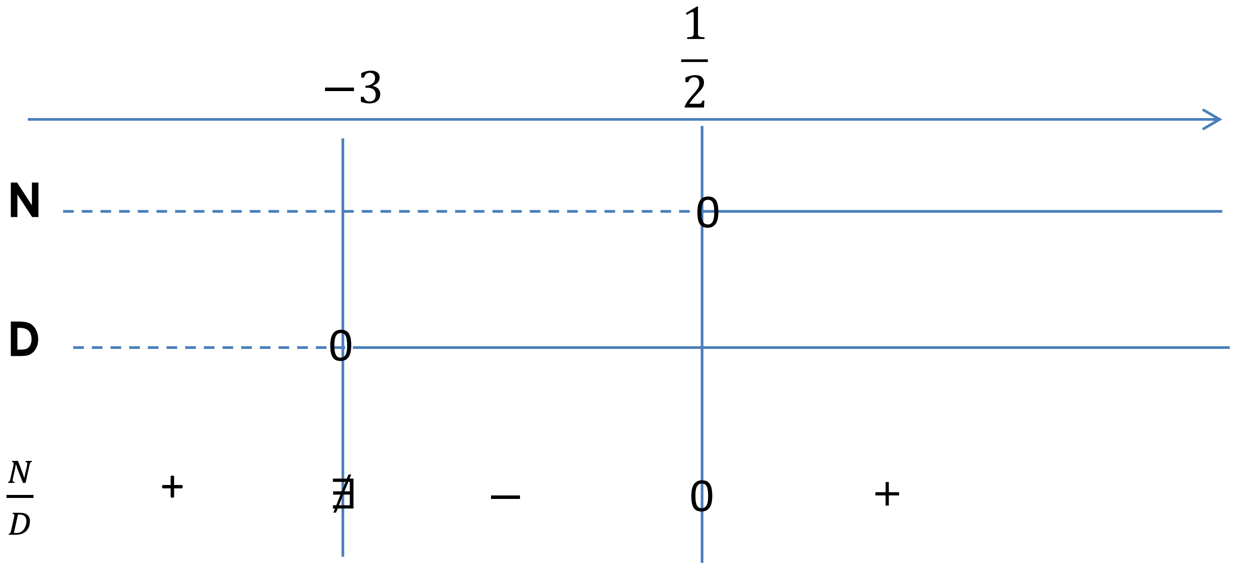
$$\frac{N(X)}{D(X)} > 0 \qquad\qquad (\geq 0, \quad \leq 0, \quad < 0)$$

Dove N(X) e D(X) sono polinomi in X.

**Esercizio:** $\frac{2x-1}{x+3} > 0$

N>0 2x-1>0 $\longrightarrow$ 2x>1 $\longrightarrow$ $\boxed{x > \frac{1}{2}}$

D>0 x+3>0 $\longrightarrow$ $\boxed{x > -3}$



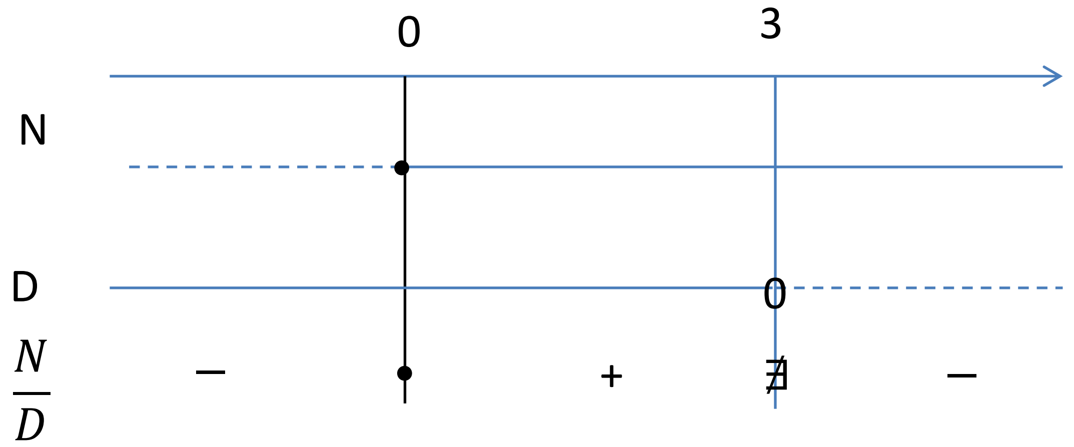

La disequazione è verificata per $x < -3 \vee x > \frac{1}{2}$

# Esercizio

$$\frac{x}{3-x} \leq 0$$

N≥0 $\boxed{x \geq 0}$

D>0 $3 - x > 0 \rightarrow -x > -3 \rightarrow \boxed{x<3}$




S: $x \leq 0 \lor x > 3$

S=$(-\infty, 0] \cup (3, +\infty)$

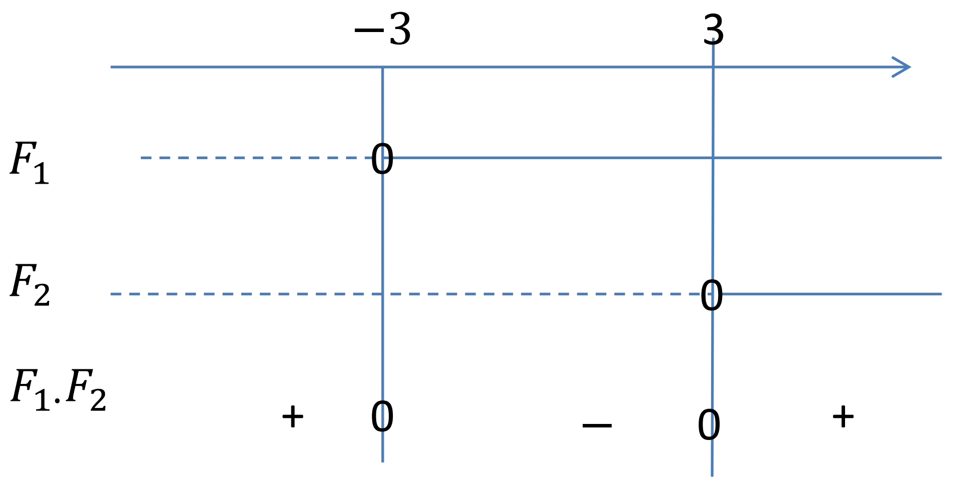
# PARTICOLARI DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

$$x^2 - 9 > 0$$

$$(x+3)(x-3)>0$$

$F_1>0 \quad x+3>0 \longrightarrow x> -3$

$F_2>0 \quad x-3>0 \longrightarrow x> 3$




S: $x< -3 \lor x>3$

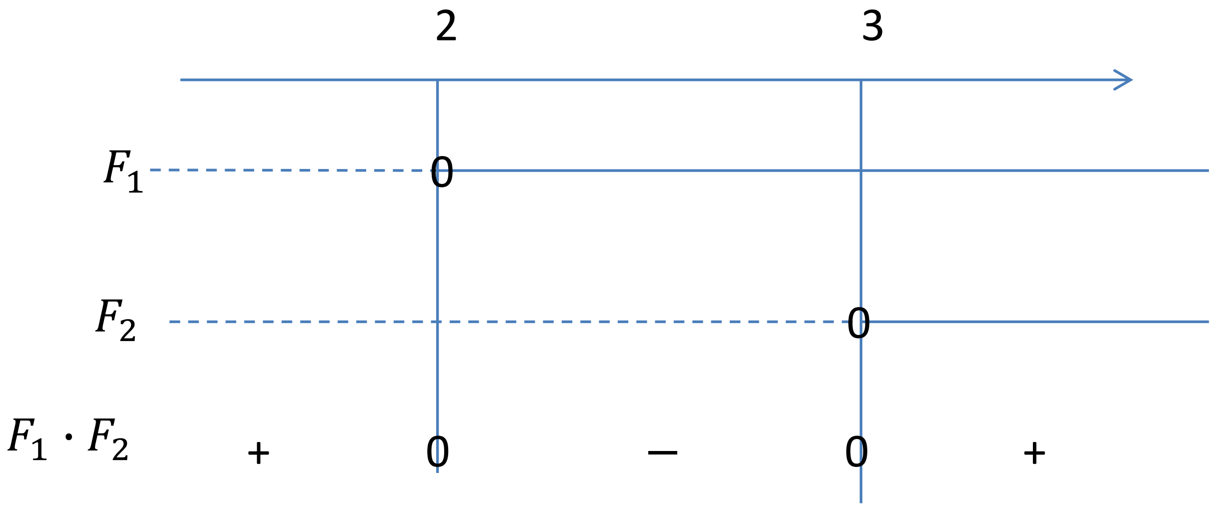
S= $(-\infty, -3) \lor (3, +\infty)$

# Esercizio:

$$(x-2)(x-3)<0$$

$F_1>0 \quad x-2>0 \longrightarrow x>2$

$F_2>0 \quad x-3>0 \longrightarrow x>3$




S: 2<x<3

S= (2 , 3)

# Esercizio

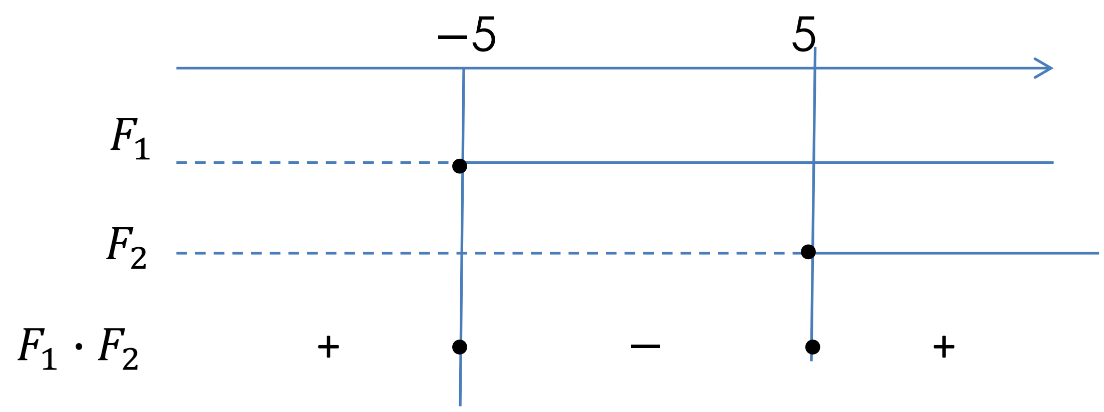
$$x^2 \geq 25$$

$$x^2 - 25 \geq 0$$

$$(x + 5)(x - 5) \geq 0$$

$F_1 \geq 0$ $\quad$ $x+5 \geq 0 \longrightarrow x \geq -5$

$F_2 \geq 0$ $\quad$ $x - 5 \geq 0 \longrightarrow x \geq 5$




S=$(-\infty, -5]$ U $(5,+\infty)$

$x \leq -5 \quad \vee \quad x \geq 5$

# Esercizi

*1)* $\frac{5-15x}{5x} \leq 0$

*2)* $\frac{(x-1)(x+1)}{x+2} - x < 0$

*3)* $\frac{(x-4)(x+4)}{x} \geq x - 4$

*4)* $\frac{(x+1)^2-x^2}{x-1} \leq 0$

# PROVA FINALE 2008

$$\frac{5-15x}{5x} \leq 0$$

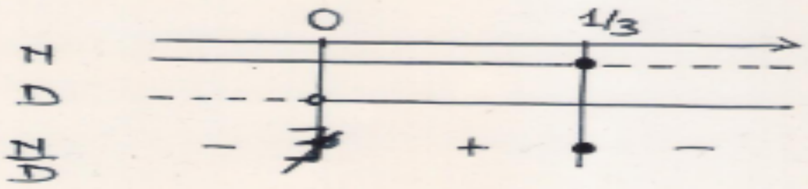
$$\frac{5(1-3x)}{5x} \leq 0$$

$$\frac{1-3x}{x} \leq 0$$

$N \geq 0 \qquad 1-3x \geq 0 \qquad -3x \geq -1$

$$\boxed{x \leq \frac{1}{3}}$$

$D > 0 \qquad \boxed{x > 0}$




$$x < 0 \;\vee\; x \geq \frac{1}{3}$$

$$S = (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

# PROVA FINALE 2015

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x+2} - x < 0$$

$$\frac{x^2-1-x(x+2)}{x+2} < 0$$

$$\frac{x^2-1-x^2-2x}{x+2} < 0$$

$$\frac{-1-2x}{x+2} < 0$$

$N > 0 \quad -1-2x > 0$

$$-2x > 1$$

$$2x < -1$$

$$x < -\frac{1}{2}$$

$D > 0 \quad x+2 > 0$

$$x > -2$$


$$S = (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

**Prova finale 2016**

$$\frac{(x-4)(x+4)}{x} \geq x-4$$

$$\frac{x^2-16}{x} - x + 4 \geq 0$$

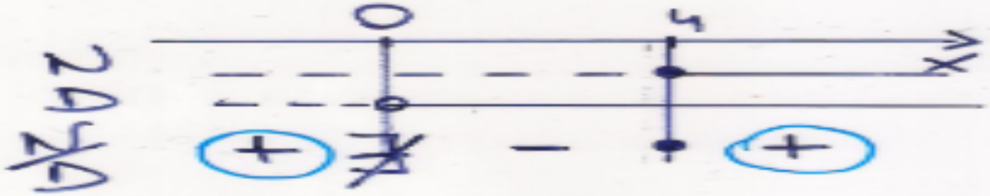
$$\frac{x^2-16-x^2+4x}{x} \geq 0$$

$$\frac{4x-16}{x} \geq 0$$

$N \geq 0 \qquad 4x-16 \geq 0$

$\qquad\qquad\quad x \geq 4$

$D > 0 \qquad x > 0$




$S = (-\infty, 0) \cup [4, +\infty)$

# Prova finale 2009

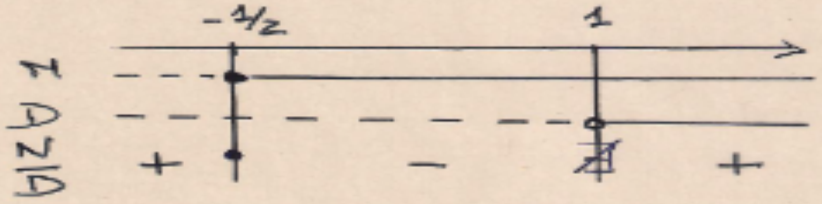
$$\frac{(x+1)^2 - x^2}{x-1} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 1 + 2x - x^2}{x-1} \leq 0$$

$$\frac{2x+1}{x-1} \leq 0$$

$N \geq 0 \qquad 2x+1 \geq 0 \qquad x \geq -\frac{1}{2}$

$D > 0 \qquad x-1 > 0 \qquad x > 1$




$$-\frac{1}{2} \leq x < 1$$

$$S = \left[-\frac{1}{2}, 1\right)$$