



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

DISEQUAZIONI

Monica Bagagli

PRECORSO DI MATEMATICA GENERALE CLET E CLEI

Si dice **disequazione** ogni disuguaglianza che contiene almeno una lettera, detta **incognita**, di cui si cercano i valori per i quali la disuguaglianza è vera.

$$A(X) < B(X) \quad \text{oppure} \quad A(X) > B(X)$$

$$A(X) \leq B(X) \quad \text{oppure} \quad A(X) \geq B(X)$$

Si chiama **insieme delle soluzioni** l'insieme dei valori di x che, sostituiti all'incognita, rendono la disequazione una disuguaglianza vera

Una disequazione può essere;

- **Impossibile:** non ha soluzioni.

$$\text{Esempio: } x^2 + 1 < 0$$

Mai verificata

- **Sempre verificata:** è verificata per ogni valore reale di x .

$$\text{Esempio: } x^2 + 1 > 0$$

Sempre verificata

- **Possibile:** ammette soluzioni.




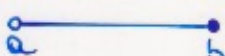
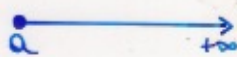



L'insieme delle soluzioni è, in generale, un intervallo o un'unione di intervalli.

$$\text{Esempio: } x - 6 > 0$$

$$x > 6$$



INTERVALLI $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$	
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$	



PRINCIPI DI EQUIVALENZA PER LE DISEQUAZIONI

Primo principio di equivalenza

Aggiungendo o sottraendo ai due membri di una disequazione uno stesso numero o una stessa espressione (definita per tutti i valori reali delle variabili che vi compaiono) si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

Secondo principio di equivalenza

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per un numero *diverso da 0*, si ottiene una disequazione equivalente a quella data, a condizione di:

- **mantenere lo stesso verso** se il numero per cui si moltiplica o divide è **positivo**
- **invertire il verso della** disequazione se il numero per cui si moltiplica o divide è **negativo**

La forma normale e il grado di una disequazione

Una disequazione algebrica nell'incognita x si dice ridotta in **forma normale** se risulta scritta in una delle seguenti forme:

$$P(X) > 0 \quad \text{oppure} \quad P(X) < 0 \quad \text{oppure} \quad P(X) \geq 0 \quad \text{oppure} \quad P(X) \leq 0$$

Dove $P(X)$ è un polinomio ridotto.

In tal caso il grado del polinomio $P(X)$ si dice **grado della disequazione**.

Disequazioni numeriche intere di primo grado

$$3x - 1 > 5x + 4$$

$$3x - 5x > 4 + 1$$

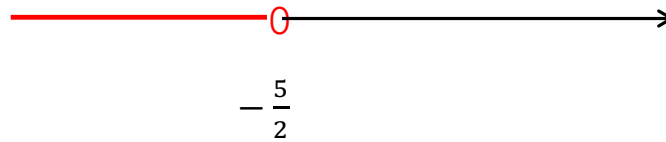
$$-2x > 5$$

$$2x < -5$$

$$x < -\frac{5}{2}$$

$$S = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$$

$$S = \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$$



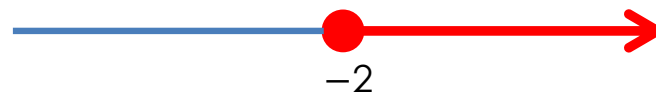
$$(x - 2) - 3(x + 1) - 3x \leq 5$$

$$x - 2 - 3x - 3 - 3x \leq 5$$

$$-5x \leq 10$$

$$5x \geq -10$$

$$x \geq -2$$



$$S = [-2, +\infty)$$



$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} > \frac{5}{3}$$

$$\frac{9x - 6}{12} > \frac{20}{12}$$

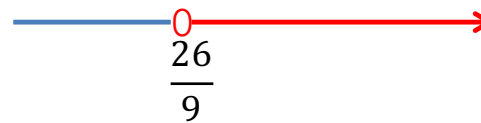
$$9x - 6 > 20$$

$$9x > 26$$

$$x > \frac{26}{9}$$

$$S = \left(\frac{26}{9}, +\infty \right)$$

$$S = \left] \frac{26}{9}, +\infty \right[$$



$$(3x + 1)(2x - 3) \leq 6x(x - 1) - x$$

$$6x^2 - 9x + 2x - 3 \leq 6x^2 - 6x - x$$

$$-9x + 2x + 6x + x \leq 3$$

$$0x \leq 3$$

Sempre verificata

$$S=R$$



$$(3x + 1)^2 - 4x(x - 2) \leq 5x(x + 6) - 16x$$

$$9x^2 + 1 + 6x - 4x^2 + 8x \leq 5x^2 + 30x - 16x$$

$$6x + 8x + 16x - 30x \leq -1$$

$$0x \leq -1$$

Mai verificata

$$S = \emptyset$$



DISEQUAZIONI FRATTE

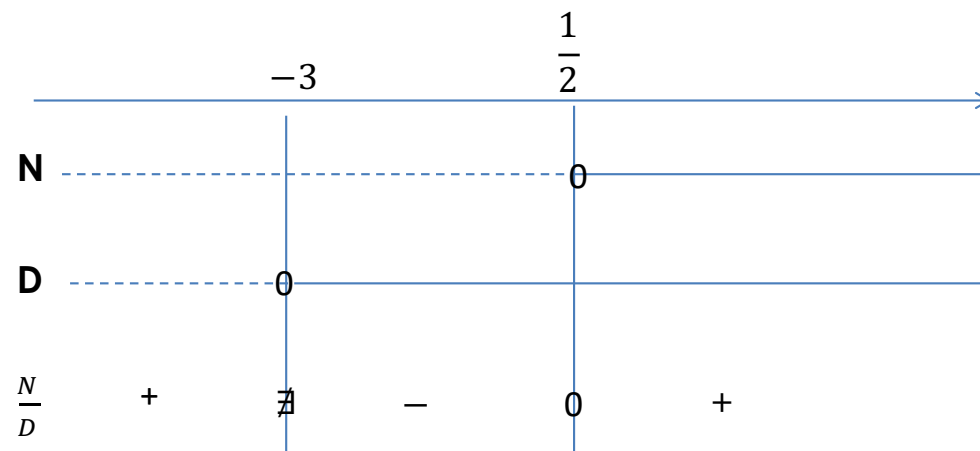
$$\frac{N(X)}{D(X)} > 0 \quad (\geq 0, \leq 0, < 0)$$

Dove $N(X)$ e $D(X)$ sono polinomi in X .

Esercizio: $\frac{2x-1}{x+3} > 0$

$$N > 0 \quad 2x-1 > 0 \quad \longrightarrow \quad 2x > 1 \quad \longrightarrow \quad x > \frac{1}{2}$$

$$D > 0 \quad x+3 > 0 \quad \longrightarrow \quad x > -3$$



La disequazione è verificata per $x < -3 \vee x > \frac{1}{2}$

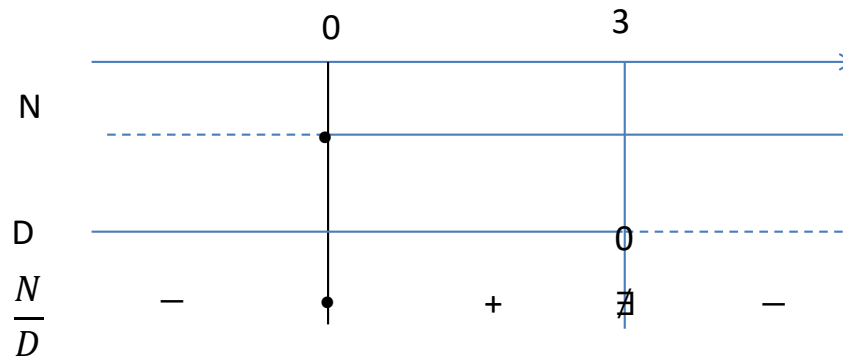
Esercizio

$$\frac{x}{3-x} \leq 0$$

$$N \geq 0$$

$$x \geq 0$$

$$D > 0 \quad 3 - x > 0 \quad \rightarrow \quad -x > -3 \quad \rightarrow \quad x < 3$$



$$S: x \leq 0 \vee x > 3$$

$$S = (-\infty, 0] \cup (3, +\infty)$$



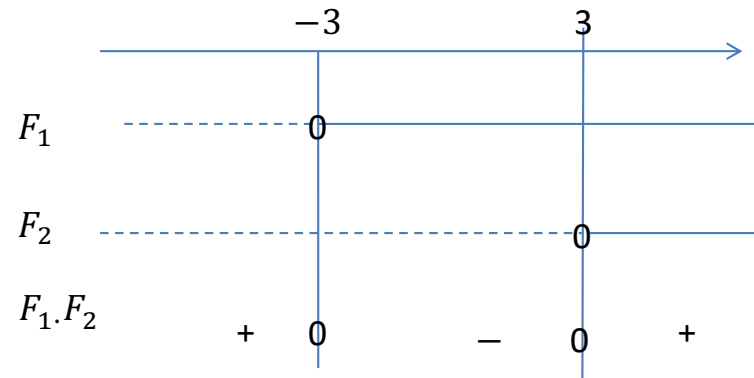
PARTICOLARI DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

$$x^2 - 9 > 0$$

$$(x + 3)(x - 3) > 0$$

$$F_1 > 0 \quad x + 3 > 0 \quad \longrightarrow \quad x > -3$$

$$F_2 > 0 \quad x - 3 > 0 \quad \longrightarrow \quad x > 3$$



$$S: x < -3 \vee x > 3$$

$$S = (-\infty, -3) \vee (3, +\infty)$$

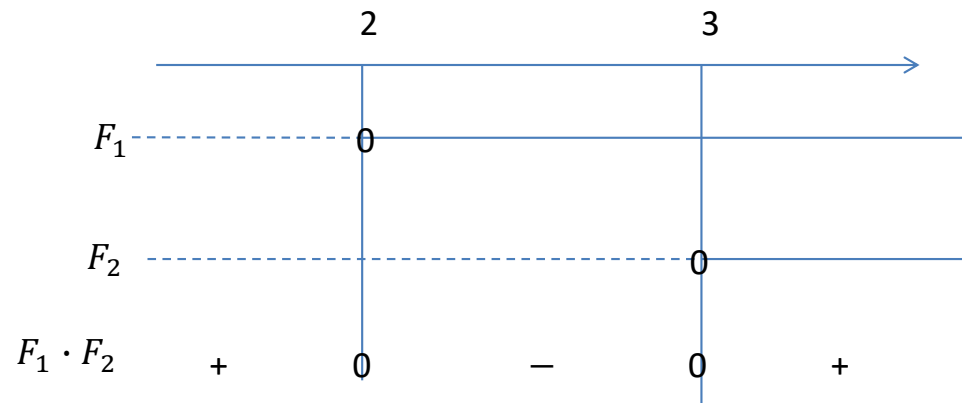


Esercizio:

$$(x - 2)(x - 3) < 0$$

$$F_1 > 0 \quad x - 2 > 0 \quad \longrightarrow \quad x > 2$$

$$F_2 > 0 \quad x - 3 > 0 \quad \longrightarrow \quad x > 3$$



$$S: 2 < x < 3$$

$$S = (2, 3)$$



Esercizio

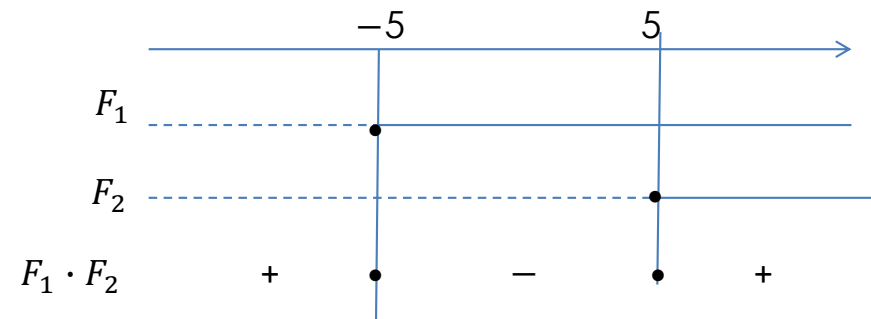
$$x^2 \geq 25$$

$$x^2 - 25 \geq 0$$

$$(x + 5)(x - 5) \geq 0$$

$$F_1 \geq 0 \quad x + 5 \geq 0 \quad \longrightarrow \quad x \geq -5$$

$$F_2 \geq 0 \quad x - 5 \geq 0 \quad \longrightarrow \quad x \geq 5$$



$$x \leq -5 \quad \vee \quad x \geq 5$$

$$S = (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$$



Esercizi

$$1) \frac{5-15x}{5x} \leq 0$$

$$2) \frac{(x-1)(x+1)}{x+2} - x < 0$$

$$3) \frac{(x-4)(x+4)}{x} \geq x - 4$$

$$4) \frac{(x+1)^2 - x^2}{x-1} \leq 0$$



PROVA FINALE 2008

$$\frac{5 - 15x}{5x} \leq 0$$
$$\frac{5(1 - 3x)}{5x} \leq 0$$
$$\frac{1 - 3x}{x} \leq 0$$

$N \geq 0 \quad 1 - 3x \geq 0 \quad -3x \geq -1$

$$\boxed{x \leq \frac{1}{3}}$$

$D > 0 \quad \boxed{x > 0}$

$x < 0 \vee x \geq \frac{1}{3}$

$$S = (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$$


PROVA FINALE 2015

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x+2} - x < 0$$
$$\frac{x^2 - 1 - x(x+2)}{x+2} < 0$$
$$\frac{x^2 - 1 - x^2 - 2x}{x+2} < 0$$
$$\frac{-1 - 2x}{x+2} < 0$$



$$N > 0 \quad -1 - 2x > 0$$

$$-2x > 1$$

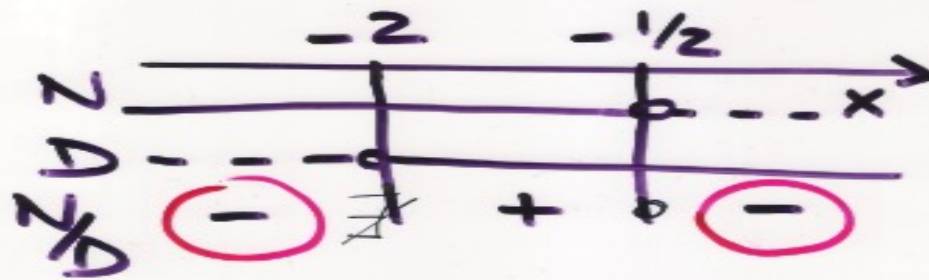
$$2x < -1$$

$$x < -\frac{1}{2}$$

$$D > 0$$

$$x + 2 > 0$$

$$x > -2$$



$$S = (-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$$



Prova finale
2016

$$\frac{(x-4)(x+4)}{x} \geq x-4$$
$$\frac{x^2-16}{x} - x + 4 \geq 0$$
$$\frac{x^2-16-x^2+4x}{x} \geq 0$$
$$\frac{4x-16}{x} \geq 0$$

$N \geq 0 \quad 4x-16 \geq 0$
 $x \geq 4$

$D > 0 \quad x > 0$

$S = (-\infty, 0) \cup [4, +\infty)$



Prova finale 2009

$$\frac{(x+1)^2 - x^2}{x-1} \leq 0$$
$$\frac{x^2 + 1 + 2x - x^2}{x-1} \leq 0$$
$$\frac{2x+1}{x-1} \leq 0$$

$N \geq 0$ $2x+1 \geq 0$ $x \geq -\frac{1}{2}$

$D > 0$ $x-1 > 0$ $x > 1$

$-\frac{1}{2} \leq x < 1$

$S = \left[-\frac{1}{2}, 1\right)$

